
DM n°2 : Fonctions usuelles

Exercice 1 : des fonctions gentilles

On considère les fonctions

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \arctan(\operatorname{sh}(x)) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \arctan\left(\frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}\right).$$

On va montrer que $f = g$ de deux manières différentes.

- 1)
 - (a) Déterminer le domaine de définition D de f et g .
 - (b) Montrer que f et g sont dérivables sur D . Calculer f' et g' .
 - (c) En déduire le résultat voulu.
- 2)
 - (a) Rappeler le domaine de définition E de la fonction \tan .
 - (b) Montrer que : $\forall x \in D \quad 2f(x) \in E$. Pour x dans D , calculer $\tan(2f(x))$.
 - (c) Montrer que la fonction $h : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)}{1 + \operatorname{ch}(x)}$ est à valeurs dans $] -1, 1[$.
 - (d) Montrer que : $\forall x \in D \quad 2g(x) \in E$. Pour x dans D , calculer $\tan(2g(x))$.
 - (e) En déduire le résultat voulu.
- 3) Application :
 - (a) Calculer $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right)$ et $\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} \ln(3)\right)$.
 - (b) En appliquant l'égalité $f(x) = g(x)$ en $x = \frac{1}{2} \ln(3)$, calculer $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 : des fonctions méchantes

On veut montrer l'identité suivante :

$$\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12} \right)$$

- 1) Montrer que $\sin \left(\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} \right) = \sin \left(\arcsin \left(\frac{\sqrt{8} + \sqrt{15}}{12} \right) \right)$.
- 2) Montrer que $\arcsin \frac{1}{3} + \arcsin \frac{1}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.
- 3) Conclure.